数理解析研究所講究録
757巻 1991年 111-121

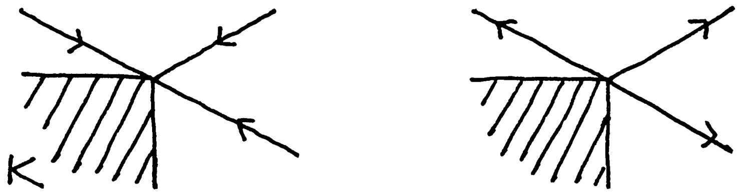
角により生ずる回折波の超局所解析

東大・理　内田素夫

Motoo UCHIDA

1970年に小松-河合(或いは独立にSchapira)により超函数(=hyperfunction)の枠組での境界値が定義されて以来，柏原-河合，金子，片岡，Schapira，大阿久らの仕事により，非特性境界値問題の代数解析的取扱いの基本的な部分は既に完成されている。またglancing problemについても，片岡，Sjöstrand，Lebeauらの重要な多くの仕事がある。glancingする場合の他にも幾何光学からのずれが生ずる場合として，障害物のedge又はvertexに単純進行波が当ったときに一次波以外に回折波の生ずることが古くから指摘されている。それにも拘らず，この問題を超局所解析の立場から考察した仕事は余りみかけない。錐的特異性をもった多様体$C(N)$($=\mathbb{R}^+\times N$にRiemann計量$g=dr^2+r^2\tilde{g}$($\tilde{g}$：N上のRiemann計量)を入れたもの)上の波動方程式の基本解をexplicitに計算し、その波面集合

を決定したCheeger-Taylorの仕事(Comm. on P.A.M. 35 ('82))もあるが、彼らの方法はedgeでの超局所解析を行なっていないために，何故(彼らが示したように)回折波が生じたのかは明らかにされていないようにみえる。例えば角Kに数本の光線が入射した場合，反射光線以外に特異性のないDirichlet問題の解がある。



この辺りの状況を明らかにしたいということが以下の考察の主な動機である。

1. M: C^ω-多様体，Xをその複素化とする。最近Schapiraは一般の閉集合$\Omega\subset M$上の超函数の境界までの特異性の余接方向分解を与える"層"$C_{\Omega|X}$とスペクトル写像$\alpha:\Gamma(\Omega,\mathcal{B}_M)\longrightarrow\Gamma(T^*_MX, C_{\Omega|X})$を構成し，$f\in\Gamma(\Omega,\mathcal{B}_M)$に対して，fのboundary解析的波面集合$SS_\Omega(f)$を，

$$SS_\Omega(f)=supp(\alpha(f))$$

により定義した。$SS_\Omega(f)$はT^*_MXの錐的閉集合である。

これは，$\Omega=\{x_1>0\}\subset\mathbb{R}^n$ とするとき，f の $N=\{x_1=0\}$ への境界値の特異スペクトル（$\subset\sqrt{-1}T^*N$）の $\sqrt{-1}\eta_1$ に関する分解になっている。　即ち，$P\in\mathcal{D}_X$ で N を非特性面とするものをとり，双曲型領域で考えるとき，$f\in\Gamma(\Omega,\mathcal{B}_M^P)$ に対して，等式

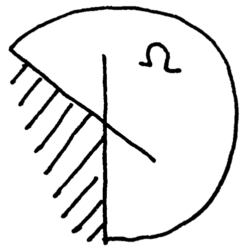
$$SS_N(\gamma(f))=\rho(SS_\Omega(f)\cap(N\underset{M}{\times}T_M^*X))$$

が成立つ。　ここに左辺は，f の N への境界値 $\gamma(f)\in\oplus\mathcal{B}_N$ の特異スペクトルを表わす。　また ρ は自然な projection：

$$\rho:\sqrt{-1}T^*M|_N(=N\underset{M}{\times}T_M^*X)\longrightarrow\sqrt{-1}T^*N,$$

$$\rho((0,x',\sqrt{-1}\eta_1,\sqrt{-1}\eta'))=(x',\sqrt{-1}\eta').$$

一般の Ω の場合は $SS_\Omega(f)$ の意味は必ずしも明確であるとはいえない。　しかし，我々の扱いたい場合には次の基本的な結果がある。Ω を優角領域とする。即ち，



$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\quad N_i=\partial\Omega_i:C^\omega\text{級},$$
$$N_1\cap N_2\text{ は横断的。}$$

このとき，

<u>Th 1</u> (Schapira)　$\forall f\in\Gamma(\Omega,\mathcal{B}_M)$ に対して，

$$SS_\Omega(f)=SS_{\Omega_1}(f|_{\Omega_1})\cup SS_{\Omega_2}(f|_{\Omega_2}).$$

我々の目標は，この定理と合せて，$SS_\Omega(f)$ に関する何らかの伝播定理を証明することにある。　なお，所謂 境界迄の正則性伝播定理は Schapira により $SS_\Omega(f)$ のことばで

γ-open subset Ω (i.e. 局所的に $\Omega+\gamma\subset\Omega$ となるような open convex cone γ がある) にまで拡張されている。但しこの結果を優角領域 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ にそのまま適用しても面白い結果はでてこない。

以上の詳細については，

P. Schapira : C.R. Acad. Sc. Paris, 302, 383-386, (1986)

——— : Colloque E.D.P. St-Jean de Monts, (1987).

或いは数理研講究録638の論説等を参照して下さい。

2. $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ を優角領域とする。
まず少し記号を準備する。

$\partial\Omega_i=N_i$，N_i の複素化を $Y_i\subset X$，$N_1\cap N_2=N_0$,
$Y_1\cap Y_2=Y_0$ とおく。自然な projection を,
$\rho_i: T^*X|_{Y_i}\longrightarrow T^*Y_i$ $(i=0,1,2)$ とする。
$p\in N_0\underset{M}{\times}T^*_MX$ に対して,
$F_p^{\mathbb{C}}=\rho_0^{-1}\rho_0(p)$，$F_p=F_p^{\mathbb{C}}\cap T^*_MX$ とおく。

以下，p (或いは F_p) を固定する。我々の得た結果は次である。

$\mathcal{M}$ を微分方程式系として，次を仮定する:

(A 1) Y_1, Y_2 は非特性的 (for $\mathcal{M}$), (A 2) $ch(\mathcal{M}) \subset \{f=0\}$ in a nbd of p

ここに，$f=f(z,\zeta)$ は斉次正則函数で，(2.1)〜(2.3) をみたす：

(2.1) $\operatorname{Im} f|_{T_M^*X}=0$

(2.2) $df \wedge \omega \neq 0$ on $\{f=0\}$

(2.3) f の Hamilton ベクトル場

$$H^{\mathbb{R}}_{\operatorname{Im} f}(p)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta_i}(p)\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial \eta_i}\right)$$

は Y_1, Y_2 に接しない。

このとき，

<u>Th 2</u> $u \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))$ が，

$SS_\Omega(u) \cap U \neq \{f=0\} \cap U$

($U \subset F$：p の十分小さい近傍)

をみたすならば，

$SS_\Omega(u) \cap U = SS_{\Omega_i}(u) \cap U \quad (i=1,2)$

定理1と組合せて，次の系を得る。

<u>Cor 3</u> 同じ仮定の下で，$u \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))$ について，

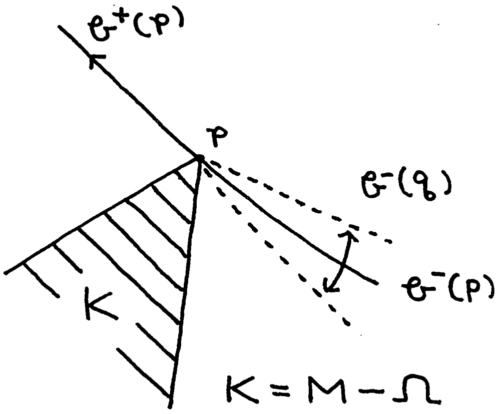
$$SS_{\Omega_1}(u|_{\Omega_1}) \cap F_p \cap U = \{p\} \Longrightarrow p \in SS_{\Omega_2}(u|_{\Omega_2})$$

この系は次のことをいっている。$\mathcal{C}^{\pm}(p)$ により p を通る $H^{\mathbb{R}}_{\operatorname{Im} f}$ の積分曲線の正（負）の部分を表わす。

今、$\mathscr{C}^+(p) \cup \mathscr{C}^-(p) \subset \Omega$ であるとする。((2.3) は仮定する，従って $\mathscr{C}^\pm(p)$ は $\partial\Omega$ に接しない。)　このとき，

$$\begin{cases} \mathscr{C}^-(q) \cap SS(u|_\Omega) = \phi & (\forall q \in F_p,\ q \sim p,\ q \neq p) \\ \mathscr{C}^-(p) \cap SS(u|_\Omega) \neq \phi \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathscr{C}^\pm(p) \subset SS(u|_\Omega) \quad \text{かつ} \quad p \in SS_\Omega(u)$$

が成立つ。　標語的にいうと，"孤立した特異性は角を通過して反対側に伝播する" ことをいっている。



3．2節の結果は何の境界条件も課さずに成立つものであった。　この節では，$\partial\Omega \setminus \angle\Omega$ に Dirichlet 境界条件を課して（Neuman 条件でも同じ），角 $\angle\Omega$ により回折波の生ずることを調べる。

まず，定理2の系として次を得る。

<u>Cor 4</u>　$u \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))$ に対して，

$p \notin SS_{\Omega_1}(u|_{\Omega_1})$，$p \in SS_{\Omega_2}(u|_{\Omega_2})$

$$\Rightarrow \quad U\cap\{f=0\}\subset SS_{\Omega_2}(u|\Omega_2)$$
$(U\subset F$: pの近傍$)$

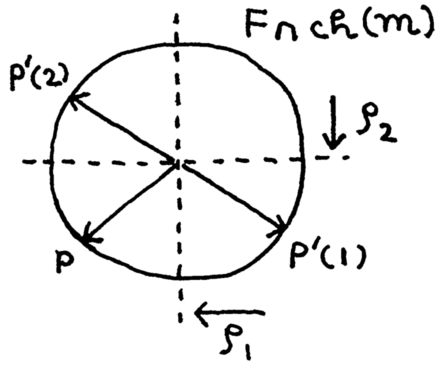
$\partial\Omega\setminus\angle\Omega$ 上でDirichlet条件を課すとき特異性が反射することに注意すると，上の系により、単純進行波が角$\angle\Omega$に当った場合に(一次波以外の)回折波の生ずることが分る。

簡単のために、$\mathbb{R}^{n-1}$上の波動作用素Pの場合に説明する。$M=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_{t=x_n}$, $\Omega=\Omega'\times\mathbb{R}$, $K=\Omega^c=K'\times\mathbb{R}$ とする。$|\angle K|\le\frac{\pi}{2}$ を仮定する。

$p=(x,i\eta)\in\mathring{T}^*_M X|_{\angle K}$ で、

$$\sigma(P)(p)=0,\quad \sum_{i=1}^{n-1}\eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in N(K')(=K'\text{の接錐})$$

をみたす点をとり、$\rho_i^{-1}\rho_i(p)\cap\{\sigma(P)=0\}=\{p,p'(i)\}$
$(i=1,2)$ により $p'(i)\in\mathring{T}^*_M X|_{\angle K}$ を定める。 ここに、
$\rho_i: T^*X|_{Y_i}\longrightarrow T^*Y_i$ であった。 次に D_i を、
$F_p\cap\{\sigma(P)=0\}$ における $p'(i)$ の十分小さな近傍とする。
$\partial\Omega\setminus\angle\Omega=N_1^\circ\cup N_2^\circ$ $(N_i^\circ\subset N_i)$
とおく。



これだけ記号を用意して，
$g\in\Gamma(\overline{\Omega},\mathcal{a}_M)$, $h_i\in\Gamma(N_i^\circ,\mathcal{a}_{N_i})$
というdataに対して，
境界値問題：

$$\begin{cases} Pu = g & \text{on } \Omega \\ u|_{N_i^\circ} = h_i & (i=1,2) \end{cases}$$

を考える。この解 $u \in \Gamma(\Omega, \mathcal{B}_M)$ の特異性 $(SS(u))$ について，系4により，次の結果を得る。

① $\forall q \in D_1 \cup D_2$ ， $\mathcal{C}^-(q) \not\subset SS(u)$

② $\exists p_i^\nu \in T^*_M X|_{N_i^\circ}$ $(i=1,2,\ \nu \in \mathbb{N})$

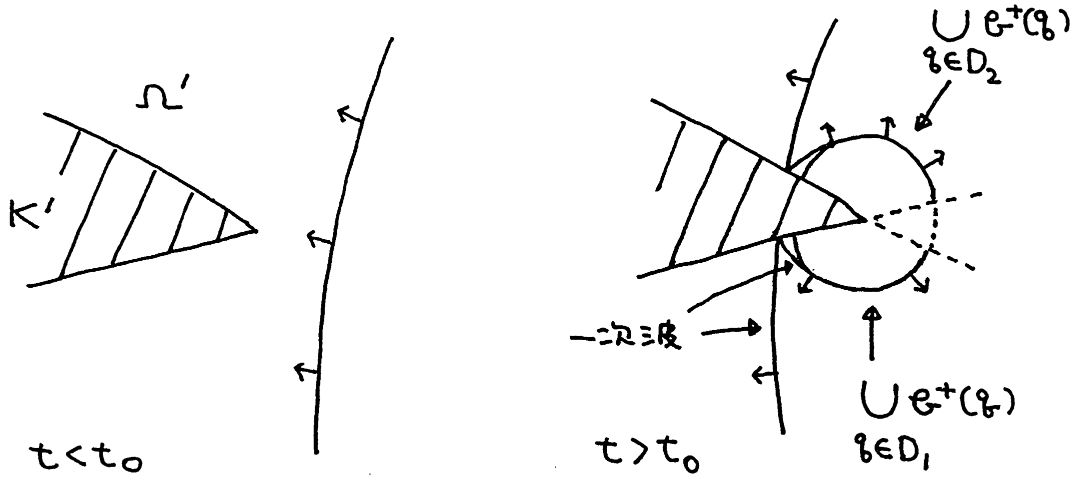
$p_i^\nu \longrightarrow p$ $(\nu \longrightarrow \infty)$ ， $\mathcal{C}^-(p_i^\nu) \cap SS(u) \neq \phi$

$\Longrightarrow$

$$\bigcup_{q \in D_1 \cup D_2} \mathcal{C}^+(q) \subset SS(u)$$

かつ $D_1 \cup D_2 \subset SS_\Omega(u)$

例えば，p をnormal方向とする単純進行波のみが K に当る場合は①，②を満たしている。$\bigcup_{q \in D_1 \cup D_2} \mathcal{C}^+(q)$ は幾何光学の法則からは生じない，所謂回折波である。



(注) 今は h_i が $\angle\Omega$ で特異性をもってもよいので，点線で挟まれた領域の $SS(u)$ については何もいえない。また同じ理由で，$\mathscr{C}^-(p) \cap SS(u) \neq \phi$ を仮定しただけでは何もいえない。

Dirichlet 境界値の正則性をもう少し強くすると，以下の結果が得られる。以下では、$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$ として，P は実単純特性的な2階偏微分作用素とする。

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，$N_i = \partial\Omega_i$，$\partial\Omega \setminus \angle\Omega = \overset{\circ}{N_1} \cup \overset{\circ}{N_2}$ 等の記号はそのまま用いる。ここでは，

(A3) $\quad \sqrt{-1}\, \overset{\circ}{T}{}^*_{N_1 \cap N_2} M \cap ch(\mathcal{M}) = \phi$

を仮定する。この仮定の下で，$F = F_p$ を固定して，

$$C = F \cap \{\sigma(P) = 0\},$$

$$C \cap \{d\rho_i|_C \neq 0\} = U(i) = U^+(i) \cup U^-(i),$$

但し、$U^{\pm}(i) = \{\pm\, d\pi H^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Im}\,\sigma(P)} \in N(\Omega_i)\}$ $(i=1,2)$

とおく。$p \in U(i)$ が generic pt であるとは，$p'(i) \in C$ を，

$$C \cap \rho_i^{-1} \rho_i(p) = \{p, p'(i)\}$$

で定めるとき、$p'(i) \in U(j)$ $(i \neq j)$ となることをいう。$U^-(i)^{gen}$ で $U^-(i)$ の generic pt 全体を表わす。(7頁の図を参照。)

さて，data $g \in \Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{a}_M)$，$h_i \in \Gamma(N_i, \mathcal{a}_{N_i})$ $(i=1,2)$

に対して，境界値問題：

$$(*)\quad \begin{cases} Pu = g & \text{on } \Omega \\ u|_{N_i^\circ} = h_i|_{N_i^\circ} & (i=1,2) \end{cases}$$

を考える。

Th 5 (A3) を仮定する。(*)の解 $u \in \Gamma(\Omega, \mathcal{B}_M)$ に対して，次が成立つ。

$p \in U^-(1)^{gen}$ とする。

① $p \in U^-(2)$ のとき，

$$U^-(i) \cap SS_{\Omega_i}(u|_{\Omega_i}) = \{p\} \quad (i=1,2)$$
$$\Rightarrow \overline{U^+(i)} \subset SS_{\Omega_i}(u|_{\Omega_i}) \quad (i=1,2)$$

② $p \in \overline{U^+(2)}$ のとき，

$$\begin{cases} U^-(1) \cap SS_{\Omega_1}(u|_{\Omega_1}) = \{p\} \\ U^-(2) \cap SS_{\Omega_2}(u|_{\Omega_2}) = \phi \end{cases}$$
$$\Rightarrow \overline{U^+(i)} \subset SS_{\Omega_i}(u|_{\Omega_i}) \quad (i=1,2)$$

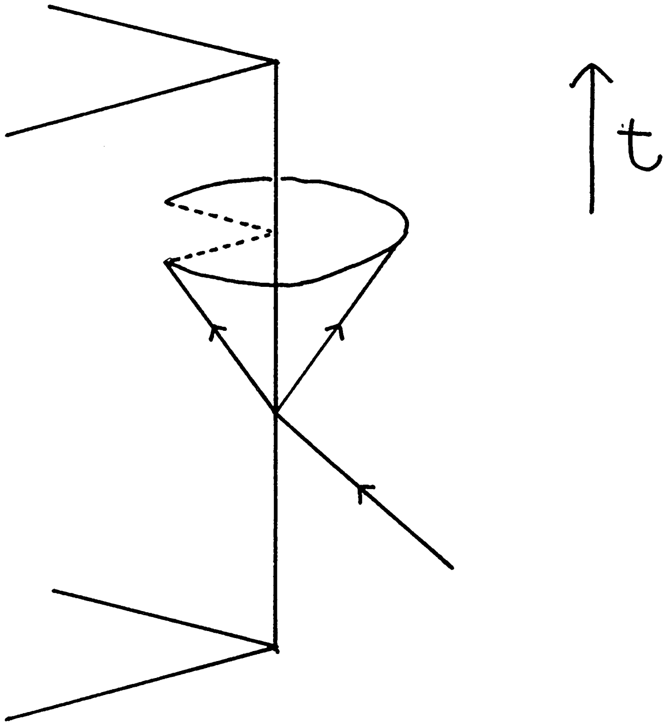
Rem 1° $U^-(i) \cap SS_{\Omega_i}(u) = U^-(i) \cap \overline{SS(u|_{\Omega_i})}$

であるから、定理の仮定は，陪特性帯に沿って角に入射してくる u の特異性が下上点 p にありそれに限られることを仮定している。

2° ①の場合は，$p \in U^-(1) \cap U^-(2)^{gen}$ でも同じ。

3° ②に於ては，$p \in U^-(1) \cap U^+(2)$ としても同じ結果が成立する。

定理5によれば，先の波動方程式の例では，点線で描いた円弧の部分に迄回折波の生じていることが分る。



以上の考察の詳細については，現在準備中の論文

Microlocal analysis of diffraction by corners

を参照して下さい。また，角による回折に関する文献については，はじめに引用したCheeger-Taylorの論文の文献表を参照して下さい。